ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ARMENIAN SSR
VII 1947 5

ФИЗИКА

В. А. Амбарцумян, действ. чл. АН Арм. ССР

О диффузном отражении и пропускании света анизотропной одномерной рассеивающей средой конечной оптической толщины

(Представлено 10 XII 1947)

В одной из наших работ ([1]) было показано, как задача о диффузном отражении и пропускании света одномерной, изотропной рассеивающей и поглощающей средой конечной оптической толщины может быть разрешена с помощью некоторых функциональных уравнений.

Мы считали среду изотропной, хотя само рассеяние в ней могло быть анизотропным в том смысле, что при элементарном акте рассеяния энергия могла направляться не поровну в обе стороны, а определенная доля x в направлении падающего луча, а доля $1-x$ в противоположном направлении.

Здесь же мы возьмем анизотропную среду такую, что доля энергии рассеиваемой в направлении падающего луча и в противоположном направлении будет соответственно x и $1-x$, когда луч падает слева и y и $1-y$, когда луч падает справа. В частном случае, когда $x=y$, имеем изотропную среду с анизотропным рассеянием.

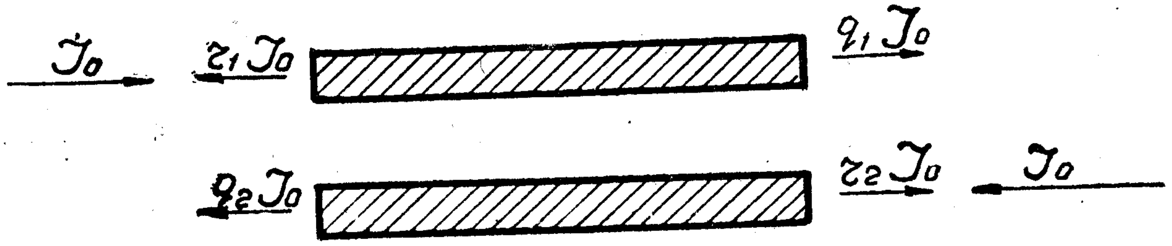
В результате мы будем иметь следующий макроскопический эффект при диффузном пропускании и отражении. Пусть имеем одномерную среду конечной оптической толщины. Когда излучение падает на нее слева (см. чертеж 1), мы будем иметь один коэфициент пропускания q_1 и коэфициент диффузного отражения r_1.

Когда же на тот же слой излучение падает справа, мы будем иметь другие коэфициенты диффузного пропускания q_2 и диффузного отражения r_2.

Задачей является установление зависимости этих четырех коэфициентов от оптической толщины. В настоящей заметке мы разберем только случай чистого анизотропного рассеяния. При чистом рассеянии

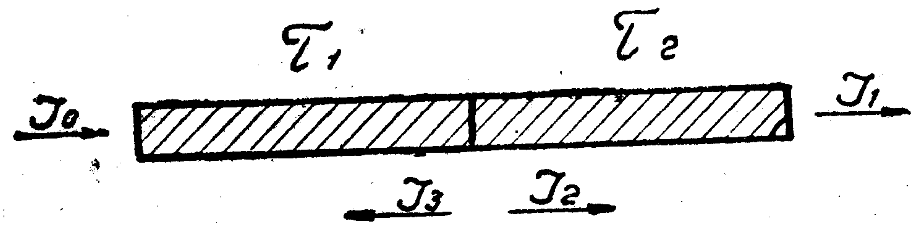
$$\begin{aligned} r_1 &= 1-q_1 \\ r_2 &= 1-q_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

и остается определить только q_1 и q_2. Эти величины могут быть найдены путем решения соответствующих уравнений переноса. Однако, здесь мы используем элегантный метод функциональных уравнений, который был уже нами развит для частного случая изотропной среды.



Черт. 1

Для вывода приложим друг к другу две среды с оптическими толщинами τ_1 и τ_2 таким образом, чтобы у них была одинаковая ориентация.



Черт. 2.

Пусть на границе между средами τ_1 и τ_2 интенсивность излучения идущего направо будет I_2, а излучения идущего налево I_3. Если I_0 и I_1 суть интенсивности падающего слева и выходящего справа излучений соответственно, а интенсивность излучения входящего в среду справа равна нулю, то очевидно должны иметь место соотношения

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= q_1(\tau_1+\tau_2)I_0 \\ I_1 &= q_1(\tau_2)I_2 \\ I_3 &= r_1(\tau_2)I_2 \\ I_2 &= q_1(\tau_1)I_0 + r_2(\tau_1)I_3 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Условием совместности этих четырех однородных уравнений является

$$q(\tau_1+\tau_2) = \frac{q_1(\tau_1)q_1(\tau_2)}{1-r_2(\tau_1)r_1(\tau_2)}. \tag{3}$$

Внося (1) в (3), получаем:

$$q_1(\tau_1+\tau_2) = \frac{q_1(\tau_1)q_1(\tau_2)}{q_2(\tau_1)+q_1(\tau_2)-q_2(\tau_1)q_1(\tau_2)}. \tag{4}$$

Аналогичное уравнение получим рассматривая случай излучения падающего справа

$$q_2(\tau_1+\tau_2) = \frac{q_2(\tau_1)q_2(\tau_2)}{q_2(\tau_1)+q_1(\tau_2)-q_2(\tau_1)q_1(\tau_2)}. \tag{5}$$

Разделив (5) на (4), получаем:

$$\frac{q_2(\tau_1+\tau_2)}{q_1(\tau_1+\tau_2)} = \frac{q_2(\tau_1)}{q_1(\tau_1)}\ \frac{q_2(\tau_2)}{q_1(\tau_2)}, \tag{6}$$

откуда очевидно, что

$$\frac{q_2(\tau)}{q_1(\tau)} = e^{k\tau}. \tag{7}$$

Теперь возьмем обратные величины от обеих частей уравнения (4).

$$\frac{1}{q_1(\tau_1+\tau_2)} = \frac{1}{q_1(\tau_1)} + \frac{q_2(\tau_1)}{q_1(\tau_1)} \left\{ \frac{1}{q_1(\tau_2)} - 1 \right\}. \tag{8}$$

Вычитая из обеих частей единицу и учитывая (7), находим:

$$\frac{1}{q_1(\tau_1+\tau_2)} - 1 = \frac{1}{q_1(\tau_1)} - 1 + e^{k\tau_1} \left\{ \frac{1}{q_1(\tau_2)} - 1 \right\}. \tag{9}$$

Обозначая

$$\frac{1}{q_1(\tau)} - 1 = f(\tau), \tag{10}$$

переписываем (9) в виде:

$$f(\tau_1+\tau_2) = f(\tau_1) + e^{k\tau_1} f(\tau_2). \tag{11}$$

Дифференцируя по τ_2 находим:

$$f'(\tau_1+\tau_2) = e^{k\tau_1}\ f'(\tau_2)$$

или полагая $\tau_2 = 0$

$$f'(\tau) = f'(0)e^{k\tau} = kAe^{k\tau},$$

где A—постоянная.

Отсюда

$$f(\tau) = A\left(e^{k\tau} - 1\right),$$

так как из (11) очевидно, что $f(0) = 0$. Следовательно

$$q_1(\tau) = \frac{1}{1 + A\left(e^{k\tau} - 1\right)}. \tag{12}$$

Кроме того, на основании (7)

$$q_2(\tau) = \frac{1}{e^{-k\tau} + A\left(1 - e^{-k\tau}\right)}. \tag{13}$$

Выражения (12) и (13) представляют собой решение системы (4) и (5) в конечном виде. Во всех решениях, имеющих физический смысл, $A > 1$.

Самым интересным является то, что при $k \neq 0$ одно из выражений (12) и (13) (в зависимости от знака k) стремится при $\tau \to \infty$ к постоянной величине. Иными словами, несмотря на беспредельное возрастание оптической толщины, прозрачность в одном направлении стремится к отличной от нуля постоянной (в другом направлении она стремится к нулю).

Ясно также, что в случае изотропии среды $k=0$ и из (11) получаем функциональное уравнение, уже рассмотренное в предыдущей работе.

Бюраканская
Астрономическая Обсерватория
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1947, ноябрь.

Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Վերջավոր օպտիկական հաստության անիզոտրոպ միաչափ միջավայրի կողմից լույսի դիֆուզ անդրադարձման եվ թափանցման մասին

Վերջավոր օպտիկական հաստություն ունեցող անիզոտրոպ միջավայրի դիֆուզ թափանցման գործակիցների $q_1(\tau)$ և $q_2(\tau)$ համար մաքուր ցրման դեպքում ստացվել են (4) և (5) ֆունկցիոնալ հավասարումները, որոնց լուծումը արտահայտվում է (12) և (13) միջոցով։ Այստեղ $q_1(\tau)$ և $q_2(\tau)$ վերաբերում են այն դեպքերին, երբ արտաքին ճառագայթները գալիս են ձախից և աջից համապատասխանաբար։ Անդրադարձման գործակիցները, համաձայն (1)-ի, արտահայտվում են թափանցման գործակիցների միջոցով։

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Амбарцумян*. Изв. АН Армянской ССР, Серия естеств. наук, стр. 31, 1944.